

# Informe Cálculo Harnero.

El objetivo de este informe es determinar la trayectoria del centro de masa del harnero Tayler 10x20.

Para determinar esto se recurrirá a un análisis dinámico del harnero.

## *Análisis Dinámico.*

Se usó un método energético para abordar el problema. Se usaron las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{dT}{dq'_i} \right] - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = 0 \quad (1)$$

donde T corresponde a la ecuación de energía cinética, U corresponde a la ecuación de energía potencial,  $q_i$  nota indicialmente las coordenadas del problema, y  $q'_i$  las derivadas de dichas coordenadas. Dichas coordenadas corresponden a "x", "y" y "z", donde "x" indica el grado de libertad correspondiente al movimiento horizontal del harnero, "y" indica el grado de libertad correspondiente al movimiento vertical del harnero, y "z" indica el grado de libertad de rotación. Se ha idealizado de esta forma para simplificar un poco el problema. La figura 1 indica el sistema de referencia. Indicado en negro, el sistema de referencia respecto del centro de masa del equipo, en rojo, el sistema

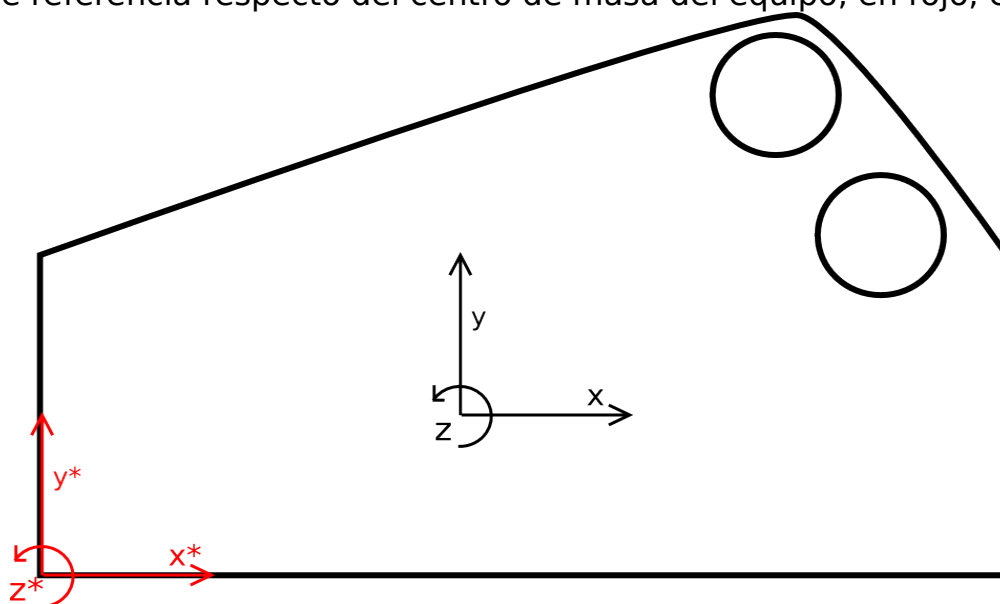


Figura 1: sistema de referencia.

de referencia respecto de la esquina inferior izquierda.

Para el planteo del problema se considerará el siguiente marco referencial:

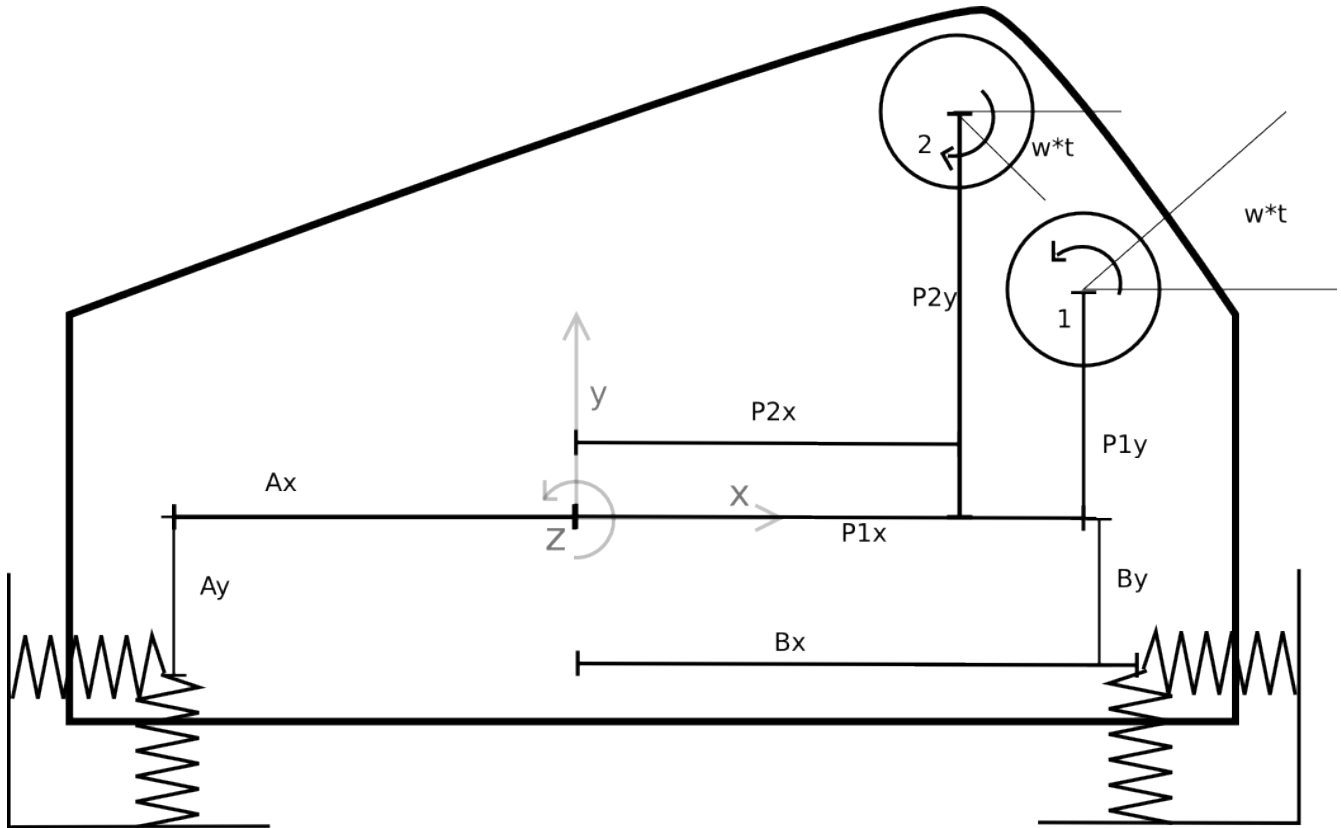


Figura 2.

$A_x$ ,  $A_y$  son la distancia horizontal y vertical desde el centro de masa al punto de apoyo de los resortes de la izquierda.  $B_x$  y  $B_y$  indican respectivamente lo mismo, para el resorte de la derecha.  $P_{1x}$  y  $P_{1y}$  son las distancias entre el centro de masa y el eje del primer contrapeso del harnero. Análogamente  $P_{2x}$  y  $P_{2y}$  indican lo propio para el segundo contrapeso.  $w$  indica la velocidad angular de los contrapesos. De ahora en adelante  $w_1$  denotará la velocidad angular del primer contrapeso, y análogamente  $w_2$  la indicará para el segundo. Los resortes verticales tienen constante  $K_y$  y los horizontales tienen constante  $K_x$ . Los resortes horizontales representan la rigidez lateral de los resortes de harnero.

De la ecuación 1, La ecuación de energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_g \dot{Z}^2 + \frac{1}{2}m_o[(\dot{x} + \dot{Z} \cdot P_{1y} - w_1 r_o \sin(w_1 t))^2 + (\dot{y} + \dot{Z} \cdot P_{1x} + w_1 r_o \cos(w_1 t))^2] + \frac{1}{2}m_o[(\dot{y} + \dot{Z} \cdot P_{2x} + w_2 r_o \cos(w_2 t))^2 + (\dot{x} + \dot{Z} \cdot P_{2y} - w_2 r_o \sin(w_2 t))^2]$$

(2)

La ecuación de energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{K_y}{2} (y - A_x \cdot Z)^2 + \frac{K_y}{2} (y - B_x \cdot Z)^2 + \frac{K_x}{2} (x - B_y \cdot Z)^2 + \frac{K_x}{2} (x - A_y \cdot Z)^2 \right) \quad (3)$$

Desarrollando la ecuación 1, reemplazando 2 y 3 en ella, se obtiene lo siguiente:

$$M \cdot V' + K \cdot V = F \quad (4)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m+2m_o & 0 & m_o(Pl_y+P2_y) \\ 0 & m+2m_o & m_o(Pl_x+P2_x) \\ m_o(Pl_y+P2_y) & m_o(Pl_x+P2_x) & I_g+m_o(Pl_x^2+P2_x^2+Pl_y^2+P2_y^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & \frac{K_x}{2}(Ay-B_y) \\ 0 & K_y & \frac{K_y}{2}(Bx-Ax) \\ \frac{K_x}{2}(Ay-B_y) & \frac{K_y}{2}(Bx-Ax) & \frac{(K_xAy^2+K_xBy^2+KyAx^2+KyBx^2)}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$F = m_o * r_o \begin{bmatrix} w_1^2 \cos(w_1 t) + w_2^2 \cos(w_2 t) \\ w_1^2 \sin(w_1 t) + w_2^2 \sin(w_2 t) \\ Pl_x w_1^2 \sin(w_1 t) + P2_x w_2^2 \sin(w_2 t) + Pl_y w_1^2 \cos(w_1 t) + P2_y w_2^2 \cos(w_2 t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$V(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}, m \text{ corresponde a la masa completa del harnero más la masa del}$$

mineral sobre las cribas,  $m_o$  corresponde a la masa de cada eje de contrapesos,  $r_o$  corresponde a la distancia que existe entre el centro de giro de los contrapesos y su centro de masa,  $I_g$  corresponde a la inercia rotacional del equipo completo,  $w_1$  y  $w_2$  corresponden a las velocidades angulares de los contrapesos. Por lo tanto, resta determinar las cantidades involucradas para resolver el sistema de EDO lineal.

### Cálculo de datos

-Cálculo de masas e inercias.

Para el cálculo de la masa del harnero, se calculó individualmente la masa de cada pieza del harnero, usando los planos para determinar el volumen de hacer involucrado en cada una, conociendo la densidad del acero.

Para la inercia de cada pieza, además de saber su masa se necesitó conocer su geometría. En el caso de las piezas más complejas, se recurrió a simplificar su estructura usando figuras geométricas simples, calcular la inercia de cada componente simplificado, calcular su centro de masa, y por Steiner se calculó la inercia de la pieza completa. Una vez conocida la inercia de cada pieza, se

procedió a aplicar el mismo procedimiento anterior para determinar la inercia global de la máquina.

Los resultados son los siguientes:

Pieza	Masa	Cx	Cy	Iz		Cxx	Cyy	Izz
Rieles sup	568	3.402	1.262	1756		1932.34	716.816	1758.58
Rieles inf	568	3.402	0.3228	1756		1932.34	183.35	2265.61
Crib inf	507	3.402	0.3706	1567.31		1724.81	187.894	1977.55
Crib sup	745	3.402	1.317	2303.05		2534.49	981.165	2308.22
Laina sup	317	3.402	1.444	1085		1078.43	457.748	1096.29
Laina inf	317	3.402	0.3706	1085		1078.43	117.48	1341.5
Tubo levante izq	201.87	1.418	1.731	2.5322		286.252	349.437	895.166
Tubo levante derch	201.87	5.7856	1.731	2.5322		1167.94	349.437	1129.12
Tubos crib sup	2073	2.9572	1.169	5614		6130.28	2423.34	6177.43
Tubo crib inf	2073	2.9572	0.18025	5614		6130.28	373.658	8608.35
Tubo protector sup	548	4.432	2.489	50.672		2428.74	1363.97	1376.22
Tubo protector inf	548	5.023	1.915	50.672		2752.6	1049.42	1603.5
Visera descarga sup	298	6.533	1.115	0.6312		1946.83	332.27	2805
Visera descarga inf	298	6.533	0.169	0.6312		1946.83	50.362	3157.74
Visera alim	445	0.154	1.443	11.1387		68.53	642.135	4915.4
Caja de separación	783	0.2412	0.57	140.83		188.86	446.31	8680.36
Ejes + contrapesos	1917	4.4432	2.489	103.5		8517.61	4771.41	4782.09
Ejes + contrapeso inf	1917	5.023	1.915	103.5		9629.09	3671.06	5535.56
Plancha principal	1720	3.2427	1.1575	4837		5577.44	1990.9	4946.04
Plancha chica	1678	2.64226	1.1972	2046		4433.71	2008.9	3201.58

Cx, Cy, indican coordenada “x” y coordenada “y” del centro de masa de cada pieza respecto de la esquina inferior izquierda del equipo. Iz indica la inercia de una pieza respecto de su propio centro de gravedad. Izz indica la inercia de cada componente del equipo respecto del centro de gravedad total, en [kg·m<sup>2</sup>]. Todas las distancias están en [m], y las masas en [kg].

Los resultados finales son los siguientes:

<b>Masa total</b>	17723.7
<b>Cx global</b>	3.46912
<b>Cy global</b>	1.26763
<b>Iz refs global</b>	68561.3

-Determinación de radio de giro de contrapesos y velocidades angulares de éstos, determinación de las distancias de la figura 2.

Dada la complejidad de la pieza, se obtuvo dicho dato mediante programas CAD:  $r_o = 0.048$  [m]. La velocidad angular de estos ejes es 780 [rpm] según documentos

de SKF, cada uno en un sentido diferente de acuerdo a la figura 2. Por lo tanto  $w_1=81.6814$  [rad/s],  $w_2=-w_1$ .

Las distancias indicadas en la figura 2 se calculan conociendo las posiciones de dichos puntos en los planos y conociendo el centro de masa del sistema. Los resultados son los siguientes. Los que se usarán son los de la segunda columna de valores:

	Abs	Refs CM
P2x	4.432	0.96288
P2y	2.489	1.22137
P1x	5.023	1.55388
P1y	1.915	0.64737
ax	0.9675	-2.50162
ay	0.093	-1.17463
bx	5.5784	2.10928
by	0.093	-1.17463

-Determinación de la rigidez de los resortes

Primero que todo, el harnero posee 12 resortes, 3 por cada apoyo hacia el suelo. Se ha idealizado el problema como si en cada apoyo hubiera sólo un resorte, cuyas rigideces son  $K_x$  y  $K_y$  del planteo. Primero se determinan las características de los resortes reales y luego se calcula un resorte equivalente que posea las constantes antes mencionadas.

Para determinar la constante longitudinal de rigidez de los resortes reales, se usó la siguiente fórmula:

$K_y' = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$  , donde  $G$  es la constan elástica del material del resorte,  $D$  es el diametro medio del resorte completo,  $d$  es el diametro de la espira del resorte, y  $n$  es el número de espiras activas. En nuestro caso:  $G=81000$  [Mpa],  $D=0.24$  [m],  $d=0.0346$ [m],  $n=7$ . Finalmente  **$K_y'=149957.32$  [N/m]** . El largo natural de los resortes es  $0.46$  [m].

Para determinar la constante transversal de cada resorte  $K_x'$ , se utilizó la ecuación de Wahl:

$$K_x' = \frac{K_y'}{1.44 \cdot C_l \cdot \left(0.204 \frac{h_s^2}{D^2} + 0.265\right)}$$

$$C_l = C_l(s_{st}/L_o, L_o/D) \quad (8)$$

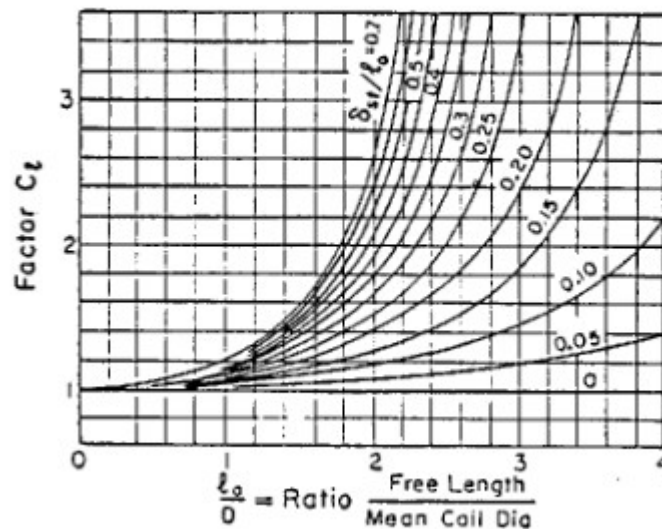
$$s_{st} = \frac{fuerZapaso_{total}}{resortes_{totales}}$$

$$h_s = L_o - s_{st}$$

D es el diametro del resorte,  $s_{st}$  es la deflexión del resorte bajo el peso de a máquina,  $L_o$  es el largo natural de los resortes. Para la fuerza peso total se considerará una masa adicional de 5.5 ton de mineral sobre el peso del a máquina en seco (datos de futura operación). Luego se añadirá el efecto de este peso extra sobre la los resultados obtenidos anteriormente.

$$s_{st} = \frac{9.8 \cdot 23223}{12 \cdot K' y} = 0.126 \quad h_s = 0.46 - s_{st} = 0.33352 = 33.352 [cms] \quad \frac{h_s^2}{D^2} = 1.93117$$

$$\frac{s_{st}}{L_o} = 0.2739 \quad \frac{L_o}{D} = 1.916666 \rightarrow \text{con éstos dos datos se entra a la siguiente tabla:}$$



Y se obtiene un  $C_l = 1.2$ .

Finalmente:  **$Kx' = 131694 [N/m]$**

Para hallar el resorte equivalente en cada apoyo:

$$Ky'' = 3 \cdot Ky' = 449871.96 [N/m] \text{ (Resortes en paralelo)}$$

$$Kx'' = Kx'/3 = 43898 [N/m] \text{ (Resortes en serie)}$$

Pero en el el planteo en el harnero se omite una dimensión (la profundidad). Por lo tanto se considera que en cada apoyo ideal existe un resorte en la izquierda que equivale a los dos de los apoyos de la izquierda en la realidad. Análogamente se razona para el lado derecho (ambos resortes estarían en paralelo).

$$Kx = 87796 [N/m]$$

$$Ky = 899742 [N/m]$$

-Recalculo de los datos del harnero

Debido al peso extra que se considera sobre el harnero para considerar el mineral que éste trabaja, los datos de inercias, masas y centros de masas cambiarán. La forma en la que se idealizan estas 5.5 ton de carga de trabajo es considerando que el 60% de ella está en el primer cribado, y el restante 40% en el segundo. La idealización de cómo representar esto en el modelo es añadiendo dicha masa a la masa de la cribas mismas, puesto que ellas son las que soportan dicho trabajo. A continuación, tablas de resultados con las nuevas condiciones:

Pieza	Masa	Cx	Cy	Iz		Cxx	Cyy	Izz
Rieles sup	568	3.402	1.262	1756		1932.34	716.816	1760.46
Rieles inf	568	3.402	0.3228	1756		1932.34	183.35	2184.32
Crib inf	2707	3.402	0.3706	8368.258364		9209.21	1003.21	10191.4
Crib sup	4045	3.402	1.317	12504.47177		13761.1	5327.27	12580.7
Laina sup	317	3.402	1.444	1085		1078.43	457.748	1106.34
Laina inf	317	3.402	0.3706	1085		1078.43	117.48	1298.5
Tubo levante izq	201.87	1.418	1.731	2.5322		286.252	349.437	897.864
Tubo levante derch	201.87	5.7856	1.731	2.5322		1167.94	349.437	1159.85
Tubos crib sup	2073	2.9572	1.169	5614		6130.28	2423.34	6124.93
Tubo crib inf	2073	2.9572	0.18025	5614		6130.28	373.658	8236.27
Tubo protector sup	548	4.432	2.489	50.672		2428.74	1363.97	1500.83
Tubo protector inf	548	5.023	1.915	50.672		2752.6	1049.42	1689.36
Visera descarga sup	298	6.533	1.115	0.6312		1946.83	332.27	2828.82
Visera descarga inf	298	6.533	0.169	0.6312		1946.83	50.362	3137.61
Visera alim	445	0.154	1.443	11.1387		68.53	642.135	4883.48
Caja de separación	783	0.2412	0.57	140.83		188.86	446.31	8519.79
Ejes + contrapesos sup	1917	4.4432	2.489	103.5		8517.61	4771.41	5218.66
Ejes + contrapeso inf	1917	5.023	1.915	103.5		9629.09	3671.06	5835.9
plancha principal	1720	3.2427	1.1575	4837		5577.44	1990.9	4915.01
plancha chica	1678	2.64226	1.1972	2046		4433.71	2008.9	3149.66

Los resultados finales son:

Masa total	23223.74	
Cx global	3.453227	
Cy global	1.1896655	
Iz refs global	87219.726	
	Abs	Refs CM
P2x	4.432	0.97877303
P2y	2.489	1.29933453
P1x	5.023	1.56977303
P1y	1.915	0.72533453
ax	0.9675	-2.485727
ay	0.093	-1.0966655
bx	5.5784	2.12517303
by	0.093	-1.0966655

### Evaluación de la ecuación diferencial

La matriz de rigidez K y la de masas M, al reemplazar los datos, quedan de la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} 27.057 & 0 & 3.8811 \\ 0 & 27.057 & 4.8852 \\ 3.8811 & 4.8852 & 98.024 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \quad K = \begin{bmatrix} 8.7796 & 0 & 0 \\ 0 & 89.9742 & 207.4265 \\ 0 & 207.4265 & 364.3975 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Por propiedades trigonométricas:

$$F = 92.016 \begin{bmatrix} 13343 \cos(81.6814 \cdot t) \\ 0 \\ 3943 \sin(81.6814 \cdot t) - 3829 \cos(81.6814 t) \end{bmatrix}$$

Para obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración se deben obtener los autovalores y los autovectores, respectivamente, de la matriz  $(M^{-1} \cdot K)$ .

Autovalores [rad/s]: **3.2479555, -5.6565, 69.2022**. (Frecuencias naturales de vibración).

Autovectores (modos de vibración, en orden respectivo a los autovalores de arriba):

$$\begin{array}{ccc} 0.99984 & -0.04078 & -0.07335 \\ V_1 = 0.01687 & V_2 = -0.89336 & V_3 = 0.87007 \\ -0.0066 & 0.44746 & 0.487437 \end{array}$$

El primer modo de vibración es primordialmente horizontal y está desacoplado de las otras direcciones. Los otros modos de vibración están acoplados. La mayor frecuencia natural de operación está lejana de la frecuencia de operación de los ejes de harnero (81 [rad/s] app). Por lo tanto se está operando en límites seguros de vibración incluso con la nueva carga de trabajo.

Para resolver la ecuación diferencial homogénea se recurre a análisis modal.

Para ello se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$M_m \cdot V_m' + K_m \cdot V_m = 0$$

Donde  $M_m$ ,  $K_m$  y  $V_m$  son, respectivamente ( $K_m$  es la matriz diagonal de los autovalores al cuadrado):

$$M_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K_m = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad V_m = \begin{bmatrix} xx \\ yy \\ ZZ \end{bmatrix} \quad (9), \quad V_m \text{ corresponde a un cambio de espacio de } V \text{ en función de los autovalores y autovectores.}$$

Las soluciones de este sistema son, inicialmente, de la siguiente forma:

$$V_{mi}(t) = \frac{\sqrt{(\lambda_i^2 V_{moi}^2 + V_{moi}'^2)}}{\lambda_i} \sin(\lambda_i \cdot t + \tan^{-1} \frac{(\lambda_i^2 \cdot V_{moi}')}{\lambda_i^2}) \quad (10), \text{ donde:}$$

$V_{mi}(t)$  es la componente modal i-ésima.

$\lambda_i$  es el i-ésimo autovalor.

$V_{moi}$  es la condición de posición inicial modal de la componente i-ésima.

$V_{moi}'$  es la condición de velocidad inicial modal de la componente i-ésima.

Dichas condiciones se calculan de la siguiente forma:

$$V_{mo}' = P^t M_m V_o'$$

$$V_{mo} = P^t M_m V_o$$

Donde P corresponde a la matriz que contiene a los modos de vibración.

Finalmente las soluciones homogéneas son:

$V(t) = P \cdot V_m(t)$ , donde nuevamente la matriz P corresponde a la matriz de los modos de vibración.

Como condición inicial se puede suponer lo siguiente:

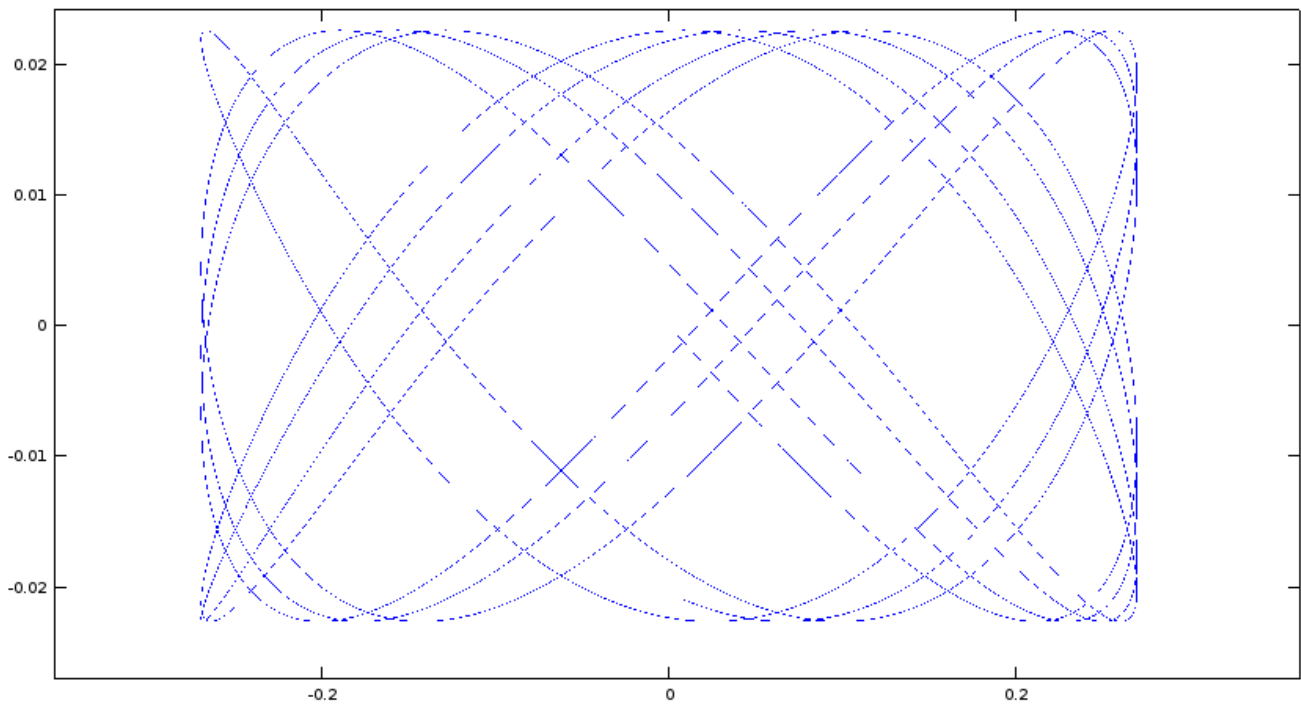
$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow V_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_{mo}' = \begin{bmatrix} 0.88306 \\ -0.20889 \\ 0.4566 \end{bmatrix}$$

Las soluciones homogéneas modales son las siguientes:

$$V_m = \begin{bmatrix} 0.27188 \cdot \sin(3.2479 \cdot t) \\ -0.03693 \cdot \sin(5.6565 \cdot t) \\ 0.006598 \cdot \sin(69.2 \cdot t) \end{bmatrix} \text{ y llevadas al espacio real:}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.269848 \cdot \sin(3.2479 \cdot t) \\ -0.0226624 \cdot \sin(5.6565 \cdot t) \\ 0.0179312 \cdot \sin(69.2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

La trayectoria homogénea del centro de masa en el plano x-y se puede obtener planteando paramétricamente las dos primeras componentes de V en función de t. Los números al margen de la gráfica están en metros.



Para determinar las soluciones particulares del sistema de EDO, se le plantea el problema al programa mathematica 9 con las condiciones de borde señaladas más arriba.

```
DSolve[{27.057*10^3*x''[t]+3.8811*10^3*z''[t]+8.7796*10^4*x[t]==92.016*13343*Cos[81.6814*t],
27.057*10^3*y''[t]+4.8852*10^3*z''[t]+89.97*10^4*y[t]+207.42*10^4*z[t]==0,
3.8811*10^3*x''[t]+4.8852*10^3*y''[t]+98.024*10^3*z''[t]+207.42*10^4*y[t]+364.39*10^4*z[t]==
92.016*(3943*Sin[81.6814*t]-3829*Cos[81.6814*t]), x'[1]==1, y'[0]==1, z'[0]==1, x[0]==0,
y[0]==0, z[0]==0}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
```

Pero los resultados escapan del sentido físico y de la memoria disponible del pc en el que sea realizó este informe.